Uitwerkingen Hst. 14 wiskunde B
Algebraïsche vaardigheden

1.

a. $(x^3-27)(x^2-4)=0 \Leftrightarrow x^3=27 \vee x^2=4 \Leftrightarrow x=3 \vee x=2 \vee x=-2$

b. $5x(x^2-4)=15(x^2-4) \Leftrightarrow x^2-4=0 \vee 5x=15 \vee x=2 \vee x=-2 \vee x=3$

c. $\left(x^2-4\right)^2=\left(x^2-8\right)^2 \Leftrightarrow x^2-4=x^2-8 \vee x^2-4=-x^2+8 \Leftrightarrow -4=-8(k.n.) \vee$

$2x^2=12 \Leftrightarrow x^2=6 \Leftrightarrow x=\sqrt{6} \vee x=-\sqrt{6}$

2.

a. Omdat bij ln(2x + 5) geldt dat dat alleen bestaat als 2x + 5 > 0 is.

b. $\left(e^{2x}-5\right)\cdot\ln(2x-5)=0 \Leftrightarrow e^{2x}=5 \vee \ln(2x-5)=0 \Leftrightarrow 2x=\ln(5) \vee 2x-5=1$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln(5)$ voldoet niet want dan is 2x -5 <0 $\vee\ x=3$ voldoet.

3.

a.

$(3x^2-5)^2=4x^2 \Leftrightarrow 3x^2-5=2x \vee 3x^2-5=-2x \Leftrightarrow 3x^2-2x-5=0 \vee 3x^2+2x-5=0 \Leftrightarrow$

$D_1=4+64 \Rightarrow x=\dfrac{2\pm 8}{6}$ en $D_2=64 \Rightarrow x=\dfrac{-2\pm 8}{6}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{3} \vee x=-1 \vee x=1 \vee x=-\dfrac{5}{3}$

b.

$(4x-1)^2=(3x-2)^2 \Leftrightarrow 4x-1=3x-2 \vee 4x-1=-3x+2 \Leftrightarrow$

$x=-1 \vee 7x=3 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=\frac{3}{7}$

c.

$\left(3^x-12\right)\cdot{}^3\log(2x+1)=0 \Leftrightarrow 3^x=12 \vee 2x-1=1 \Leftrightarrow$

$x={}^3\log(12)$ voldoet $\vee\ x=1$ voldoet

d.

$(x-1).\cos(2x+\frac{1}{4}\pi)=0 \Leftrightarrow x=1 \vee 2x+\frac{1}{4}\pi=\frac{1}{2}\pi+k.\pi \Leftrightarrow x=1 \vee x=\frac{1}{8}\pi+k.\frac{1}{2}\pi$

e.

$2^x.\log(4x+1)=20.\log(4x+1) \Leftrightarrow \log(4x+1)=0 \vee 2^x=20 \Leftrightarrow$

$4x+1=1 \vee x={}^2\log(20) \Leftrightarrow x=0 \vee x={}^2\log(20)$ voldoen.

f.

$x^3.\sin(2x)=\sin(2x) \Leftrightarrow \sin(2x)=0 \vee x^3=1 \Leftrightarrow 2x=k.\pi \vee x=1 \Leftrightarrow x=k.\frac{1}{2}\pi \vee x=1$

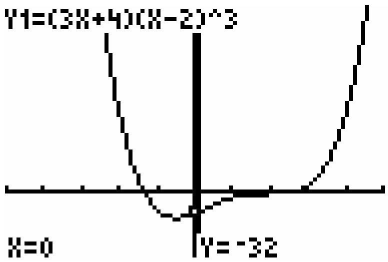
4. Gegeven: $f(x)=(3x+4)(x-2)^3$

a. Nulpunten van $f \Rightarrow$ $f(x)=0 \Leftrightarrow 3x+4=0 \vee x-2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{3} \vee x=2$

b.
$$f'(x)=3.(x-2)^3+(3x+4).3(x-2)^2=3.(x-2)^2.\big((x-2)+(3x+4)\big)=$$
$$3(x-2)^2(4x+2)=(12x+6)(x-2)^2$$

Voor de extreme waarde geldt : $f'(x)=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \vee x=2$

Nu de schets van de grafiek :



Nu blijkt : $\min\ f(-\frac{1}{2})=-39\frac{1}{16}$

Opmerking: Bij $x = 2$ is er wel een horizontale raaklijn , maar geen extreme waarde.

c.

Voor het snijden geldt :
$$(3x+4)(x-2)^3=3x+4 \Leftrightarrow 3x+4=0 \vee (x-2)^3=1 \Leftrightarrow$$
$$x=-\frac{4}{3} \vee x-2=1 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{3} \vee x=3$$

De coördinaten van A en B zijn $A\left(-\frac{4}{3},0\right)$ en $B(3,13)$

d.

Voor de snijpunten geldt :
$$(3x+4)(x-2)^3=(3x+4)(x-2) \Leftrightarrow (3x+4)(x-2)=0 \vee \left(x-2\right)^2=1 \Leftrightarrow$$
$$x=-\frac{4}{3} \vee x=2 \vee x-2=\pm 1 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{3} \vee x=2 \vee x=3 \vee x=1$$

$\Rightarrow$ De snijpunten zijn : $\left(-\frac{4}{3},0\right)$; $\left(2,0\right)$; $(3,13)$ en $\left(1,\text{-}7\right)$

5a
$$\frac{2x-1}{x-1}=0 \Leftrightarrow 2x=1 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

b.
$$\frac{2x-1}{x-1}=\frac{3x+1}{x+1} \Leftrightarrow (2x-1)(x+1)=(3x+1)(x-1) \text{ en } x \neq \pm 1 \Leftrightarrow$$
$$2x^2+x-1=3x^2-2x-1 \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=3$$

c.
$$\frac{2x-1}{x-1}=\frac{2x-1}{2x+1} \Leftrightarrow 2x-1=0 \vee \frac{1}{x-1}=\frac{1}{2x+1} \Rightarrow$$
$$x=\frac{1}{2} \vee x-1=2x+1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \vee x=-2 \text{ voldoen.}$$

d.

$$\frac{2x-1}{x-1}=\frac{x+1}{x-1}\Leftrightarrow 2x-1=x+1\wedge x\neq 1\Leftrightarrow x=2$$

6. Neem bij $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ C = 0 en D $\neq 0 \Rightarrow A=0$

Neem bij $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ C = A dan A = 0 en de noemers ongelijk 0.

Neem bij $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ C = A en D = C $\Rightarrow A=C$ en D en B $\neq 0$.

7.

a. $\frac{x^2+3}{2x}=x-1\Leftrightarrow x^2+3=2x(x-1)\wedge x\neq 0\Rightarrow x^2+3=2x^2-2x\Leftrightarrow$

$x^2-2x-3=0\Leftrightarrow (x-3)(x+1)=0\Leftrightarrow x=3\vee x=-1$ voldoen.

b.

$\frac{4^x-2^x-6}{2^x-4}=0$ Stel $2^x=p\Rightarrow$

$\frac{p^2-p-6}{p-4}=0\Rightarrow (p-3)(p+2)=0\Rightarrow 2^x=3\vee 2^x=-2\Rightarrow x={}^2\log(3)$

De andere vergelijking geeft geen oplossing.

c.

$\frac{\cos(2x)}{4x}=\frac{\cos(2x)}{2x+\pi}\Rightarrow \cos(2x)=0\vee 4x=2x+\pi\Leftrightarrow 2x=\frac{1}{2}\pi+k\pi\vee 2x=\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}\pi+k.\frac{1}{2}\pi\vee x=\frac{1}{2}\pi$ voldoen.

d.

$\frac{\ln^2(x)}{1+\ln(x)}=\frac{2+\ln(x)}{1+\ln(x)}\Rightarrow \ln^2(x)=2+\ln(x)\Leftrightarrow \ln^2(x)-\ln(x)-2=0\Rightarrow$

$\left(\ln(x)-2\right)\left(\ln(x)+1\right)=0\Rightarrow \ln(x)=2\vee \ln(x)=-1$ v.n. $\Leftrightarrow x=e^2$

8. Gegeven : $f(x)=\frac{10.\ln(x)}{x}$

a. $f'(x)=\frac{10.\frac{1}{x}.x-10.\ln(x).1}{x^2}=\frac{10-10.\ln(x)}{x^2}=0\Rightarrow \ln(x)=1$

$\Rightarrow x=e\Rightarrow$ top $\left(e,\frac{10}{e}\right)$

b.

Voor het buigpunt geldt:

$$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{\frac{-10}{x}.x^2-2x.(10-10.\ln(x))}{x^4}=0 \Leftrightarrow \frac{-30x+20x.\ln(x)}{x^4}=0 \Rightarrow$$

$$\frac{-30+20\ln(x)}{x^3}=0 \Rightarrow 20\ln(x)=30 \Leftrightarrow \ln(x)=1\tfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=e\sqrt{e} \Rightarrow$$

Het buigpunt is : $\left(e\sqrt{\mathrm{e}},\frac{5}{e\sqrt{e}}\right)$

c. k door O en raakt aan de kromme $\Rightarrow$

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \frac{10-10\ln(x)}{x^2}=\frac{10\ln(x)}{x^2} \Rightarrow 10-10\ln(x)=10\ln(x) \Leftrightarrow$$

$$20\ln(x)=10 \Leftrightarrow \ln(x)=\tfrac{1}{2} \Rightarrow x=\sqrt{e}$$

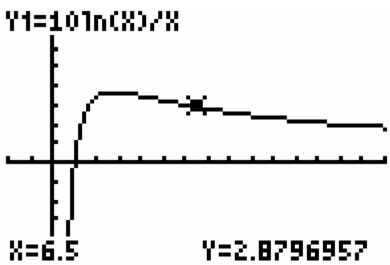
$\Rightarrow$ Het raakpunt is $\left(\sqrt{e},\frac{5}{\sqrt{e}}\right)$ en de r.c. van de raaklijn is $f'(\sqrt{e})=\frac{5}{e} \Rightarrow$

De vergelijking van de raaklijn door O is dus : $y=\frac{5}{e}.x$

d. $F(x)=5.\ln^2(x) \Rightarrow F'(x)=10.\ln(x).\frac{1}{x}=\frac{10.\ln(x)}{x}=f(x)$

Eerst een schets van de situatie . $\Rightarrow$

Nu geldt dus :



$$\int_1^a \frac{10\ln(x)}{x}dx=\left[5\ln^2(x)\right]_1^a=10$$

$$5\ln^2(a)-0=10 \Leftrightarrow \ln^2(a)=2$$

$$\ln(a)=\sqrt{2} \vee \ln(a)=-\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$a=e^{\sqrt{2}} \text{ (voldoet) } \vee a=e^{-\sqrt{2}} \approx 0{,}24 \text{ (v.n.)}$$

9.

a. $(2x+1)^2=4x^2+4x+1$

b. $(3x-2)^2=9x^2-12x+4$

c. $(4x+3)(4x-3)=16x^2-12x+12x-9=16x^2-9$

d. $(x+2)^2=x^2+4x+4$

10a

$$\left(3x\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)^2=9x^2.2-6x\sqrt{10}+5=18x^2-6x\sqrt{10}+5$$

b.

$$(2x-1)^3=\left(4x^2-4x+1\right)(2x-1)=8x^3-8x^2+2x-4x^2+4x-1=$$

$$8x^3-12x^2+6x-1$$

c.

$$\frac{2x^5-32x}{x^2-4}=\frac{2x(x^4-16)}{x^2-4}=\frac{2x(x^2-4)(x^2+4)}{x^2-4}=2x(x^2+4)$$ en $x \neq 2$ en $x \neq -2$

d.

$$(4x\sqrt{2}-3)(4x\sqrt{2}+3)=16x^2.3-9=32x^2-9$$

e.

$$\left(2^x+1\right)^3=\left(2^{2x}+2.2^x+1\right)\left(2^x+1\right)=2^{3x}+2^{2x}+2.2^{2x}+2.2^x+2^x+1=$$

$$2^{3x}+3.2^{2x}+3.2^x+1$$

f.

$$\frac{x^4+4x^2+4}{x^4-4}=\frac{\left(x^2+2\right)^2}{(x^2-2)(x^2+2)}=\frac{x^2+2}{x^2-2}$$ met $x \neq -\sqrt{2}$ en $x \neq \sqrt{2}$

11. Gegeven : $y=x^2$ en A(a,a^2)en B(b , b^2) en a < b.

a.

$$r.c._k=\frac{b^2-a^2}{b-a}=\frac{(b+a)(b-a)}{b-a}=b+a \Rightarrow k:\ y=(b+a)x+n$$

Door het punt A $\Rightarrow$ $a^2=(b+a).a+n \Rightarrow n=a^2-ab-a^2=-ab \Rightarrow$

De gevraagde vergelijking is : $y=(b+a)x-ab$

$$O(V)=\int_a^b \left((a+b)x-ab\right)-x^2dx=\left[(a+b).\tfrac{1}{2}x^2-abx-\tfrac{1}{3}x^3\right]_a^b=$$

b. Zie ook de figuur : $\left(\frac{1}{2}b^2(a+b)-ab^2-\frac{1}{3}b^3\right)-\left(\frac{1}{2}a^2(a+b)-a^2b-\frac{1}{3}a^3\right)=$

$$\frac{1}{2}ab^2+\frac{1}{2}b^3-ab^2-\frac{1}{3}b^3-\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{2}a^2b+a^2b+\frac{1}{3}a^3=$$

$$\frac{1}{6}b^3-\frac{1}{2}ab^2+\frac{1}{2}a^2b-\frac{1}{6}a^3$$

Nu vergelijken met :

$$\frac{1}{6}(b-a)^3=\frac{1}{6}(b^2-2ab+a^2)(b-a)=$$

$$\frac{1}{6}(b^3-ab^2-2ab^2+2a^2b+a^2b-a^3)=\frac{1}{6}b^3-\frac{1}{2}ab^2+\frac{1}{2}a^2b-\frac{1}{6}a^3$$

$\Rightarrow$ Beide vormen zijn gelijk en dan klopt het gevraagde.

12. Gegeven : y = x^2 Lijn k door (2,0) en A(a , $4-a^2$)

$$r.c._k is:\ \frac{4-a^2-0}{a+2}=\frac{(2+a)(2-a)}{2+a}=2-a \ \Rightarrow$$

Stel de vergelijking is k : $y=(2-a)x+n$ Door het punt (-2 , 0) $\Rightarrow$

$0=-2(2-a)+n \Rightarrow n=4-2a \Rightarrow k: y=(2-a)x+4-2a \Rightarrow$

O(V) =

$$\int_{-2}^{a}\left(4-x^2\right)-\left((2-a)x+4-2a\right)dx- = \left[4x-\tfrac{1}{3}x^3-(2-a)\tfrac{1}{2}x^2-4x+2ax\right]_{-2}^{a} =$$

$$\left(4a-\tfrac{1}{3}a^3-a^2+\tfrac{1}{2}a^3-4a+2a^2\right)-\left(-8+\tfrac{8}{3}-4+2a+8-4a\right)=$$

$$\left(\tfrac{1}{6}a^3+a^2\right)-\left(-\tfrac{4}{3}-2a\right)=\tfrac{1}{6}(a^3+6a^2+12a+8)$$

Nu berekenen :

$$\tfrac{1}{6}(a+2)^3=\tfrac{1}{6}(a^2+4a+4)(a+2)=\tfrac{1}{6}(a^3+2a^2+4a^2+8a+4a+8)=$$

$$\tfrac{1}{6}(a^3+6a^2+12a+8)=\tfrac{1}{6}(a+2)^3$$

We zien dat beide uitkomsten gelijk zijn dus volgt het gevraagde.

13a.

$$y=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2}{x}-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$$

b.

$$y=\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x+2}=\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x+2}{x+2}+\frac{x}{x+2}\cdot\frac{x+1}{x+1}=\frac{x^2+2x+x^2+x}{(x+1)(x+2)}=\frac{2x^2+3x}{(x+2)(x+1)}$$

c.

$$y=\frac{x}{\left(\frac{2}{x}\right)}=x\cdot\frac{x}{2}=\frac{x^2}{2}=\tfrac{1}{2}x^2$$

d.

$$y=(x+1)\cdot\frac{x+2}{x+3}=\frac{(x+1)(x+2)}{x+3}=\frac{x^2+3x+2}{x+3}$$

e.

$$y=\frac{2}{x}\cdot\frac{x+2}{x+3}=\frac{2x+4}{x(x+3)}$$

f.

$$y=\frac{x+1}{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)}=\left(x+1\right)\cdot\frac{x-1}{x+2}=\frac{x^2-1}{x+2}$$

14.

$$y=\left(\frac{20}{x-1}\right)\cdot\left(4-\frac{2}{x-1}\right)=\left(\frac{20}{x-1}\right)\cdot\left(4\cdot\frac{x-1}{x-1}-\frac{2}{x-1}\right)=\left(\frac{20}{x-1}\right)\cdot\left(\frac{4x-6}{x-1}\right)=$$

$$\frac{80x-120}{(x-1)^2}$$

15a.

$$y = \frac{20}{x} - \frac{5}{2x} = \frac{40}{2x} - \frac{5}{2x} = \frac{35}{2x}$$

b.

$$y = \frac{10}{x-1} - x^2 = \frac{10}{x-1} - x^2 \cdot \frac{x-1}{x-1} = \frac{10 - x^3 + x^2}{x-1}$$

c.

$$y = \frac{2x^2}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = 2x^2 \cdot \frac{x-1}{x+1} = \frac{2x^3 - 2x^2}{x+1}$$

d.

$$y = \frac{x}{x-1} \cdot \left(x + \frac{1}{x-1}\right) = \frac{x}{x-1} \cdot \left(x.\frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1}\right) = \frac{x}{x-1} \cdot \left(\frac{x^2 - x + 1}{x-1}\right) = \frac{x^3 - x^2 + x}{(x-1)^2}$$

e.

$$y = \frac{5}{x-2} \cdot \frac{6}{x+2} = \frac{30}{(x-2)(x+2)}$$

f.

$$y = \frac{\left(\frac{x+1}{2x}\right)}{x-1} = \frac{x+1}{2x} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{2x(x-1)}$$

16a.

$$y = \frac{\ln(x)}{x} - \frac{2\ln(x)}{3x} = \frac{3\ln(x)}{3x} - \frac{2\ln(x)}{3x} = \frac{\ln(x)}{3x}$$

b.

$$y = \frac{e^x}{x-1} - 2e^x = \frac{e^x}{x-1} - 2e^x \cdot \frac{x-1}{x-1} = \frac{e^x}{x-1} - \frac{2xe^x - 2e^x}{x-1} = \frac{3e^x - 2xe^x}{x-1}$$

c.

$$y = \frac{e^x - 2}{\left(\frac{e^x + 1}{e^x + 2}\right)} = \frac{e^x - 2}{1} \cdot \frac{e^x + 2}{e^x + 1} = \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 1}$$

d.

$$y = \frac{2^x}{2^x + 4}\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right) = \frac{2^x}{2^x + 4}\left(\frac{2^{2x}}{2^x} + \frac{1}{2^x}\right) = \frac{2^{3x} + 2^x}{2^x\left(2^x + 4\right)} = \frac{2^{2x} + 1}{2^x + 4}$$

e.

$$y = \frac{e^x}{e^x - 1} \cdot \frac{e^{2x}}{e^x + 1} = \frac{e^{3x}}{\left(e^x - 1\right)\left(e^x + 1\right)}$$

f.

$$y=\frac{\left(\frac{5+\ln(x)}{x}\right)}{x}=\frac{5+\ln(x)}{x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{5+\ln(x)}{x^2}$$

17. Gegeven : $f(x)=\frac{4e^x}{e^x+1}$ en $g(x)=\frac{e^x}{e^x-1}$

a.

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow\frac{4e^x}{e^x+1}=\frac{e^x}{e^x-1}\Leftrightarrow 4\left(e^x-1\right)=e^x+1\Leftrightarrow 4e^x-4=e^x+1\Leftrightarrow$$

$$3e^x=5\Leftrightarrow e^x=\frac{5}{3}\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

b.

$$f(x).g(x)=6\Leftrightarrow\frac{4e^x}{e^x+1}\cdot\frac{e^x}{e^x-1}=6\Leftrightarrow\frac{4e^{2x}}{e^{2x}-1}=6\Leftrightarrow 4e^{2x}=6.e^{2x}-6\Leftrightarrow$$

$$2e^{2x}=6\Leftrightarrow e^{2x}=3\Leftrightarrow 2x=\ln(3)\Leftrightarrow x=\tfrac{1}{2}\ln(3)$$

c.

$$f(x)-g(x)=3\Leftrightarrow\frac{4e^x}{e^x+1}-\frac{e^x}{e^x-1}=3\Leftrightarrow\frac{4e^x}{e^x+1}=3\cdot\frac{e^x-1}{e^x-1}+\frac{e^x}{e^x-1}\Leftrightarrow$$

$$\frac{4e^x}{e^x+1}=\frac{3e^x-3+e^x}{e^x-1}\Leftrightarrow\frac{4e^x}{e^x+1}=\frac{4e^x-3}{e^x-1}\Leftrightarrow 4e^x\left(e^x-1\right)=\left(4e^x-3\right)\left(e^x+1\right)\Leftrightarrow$$

$$4e^{2x}-4e^x=4e^{2x}+4e^x-3e^x-3\Leftrightarrow 5e^x=3\Leftrightarrow e^x=\frac{3}{5}\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{3}{5}\right)$$

d.

$$f'(x)+g'(x)=0\Leftrightarrow\frac{4e^x\left(e^x+1\right)-4e^x.e^x}{\left(e^x+1\right)^2}+\frac{e^x\left(e^x-1\right)-e^x.e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{4e^{2x}+4e^x-4e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^{2x}-e^{2x}+e^x}{\left(e^x-1\right)^2}\Leftrightarrow\frac{4e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$4\left(e^x-1\right)^2=\left(e^x+1\right)^2\Leftrightarrow 4e^{2x}-8e^x+4=e^{2x}+2e^x+1\Leftrightarrow 3e^{2x}-10e^x+3=0$$

Stel $\mathrm{e}^x=p\Rightarrow 3p^2-10p+3=0$

$$D=64\Rightarrow p=\frac{10\pm 8}{6}\Rightarrow p=e^x=3\vee p=e^x=\tfrac{1}{3}\Leftrightarrow x=\ln(3)\vee x=\ln\left(\tfrac{1}{3}\right)$$

18. Gegeven : $y=\frac{1+\frac{3}{x}}{x+1}\Rightarrow y=\frac{\frac{x}{x}+\frac{3}{x}}{x+1}=\frac{\frac{x+3}{x}}{x+1}=\frac{x+3}{x}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{x+3}{x(x+1)}$

a. I is goed ; II is niet goed ;

III : $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3}{x(x+1)}=\dfrac{x}{x(x+1)}+\dfrac{3}{x(x+1)}=\dfrac{x+3}{x(x+1)}$ $\Rightarrow$ Ook III is goed.

IV : $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3(x+1)}{x}=\dfrac{x}{x(x+1)}+\dfrac{3(x+1)^2}{x(x+1)}=\dfrac{x+3x^2+6x+3}{x(x+1)}$ $\Rightarrow$ IV is niet goed

19a.

$$y=\frac{x+\dfrac{3}{x+1}}{x}=\frac{x+\dfrac{3}{x+1}}{x}\cdot\frac{x+1}{x+1}=\frac{x^2+x+3}{x(x+1)}$$

b.

$$y=\frac{10x}{p+\dfrac{x^2}{2p}}=\frac{10x}{\left(p+\dfrac{x^2}{2p}\right)}\cdot\frac{2p}{2p}=\frac{20px}{2p^2+x^2}$$

c.

$$y=\frac{10+\dfrac{5}{x-1}}{6-\dfrac{3}{x-1}}=\frac{\left(10+\dfrac{5}{x-1}\right)}{\left(6-\dfrac{3}{x-1}\right)}\cdot\frac{x-1}{x-1}=\frac{10x-10+5}{6x-6-3}=\frac{10x-5}{6x-9}$$

d.

$$y=\frac{\dfrac{3x}{x+4}-5}{\dfrac{2x}{x+4}-x+5}=\frac{\left(\dfrac{3x}{x+4}-5\right)}{\left(\dfrac{2x}{x+4}-x+5\right)}\cdot\frac{x+4}{x+4}=\frac{3x-5x-20}{2x-x^2-4x+5x+20}=$$

$$\frac{-2x-20}{-x^2+3x+20}$$

20.

a.

$$N=\frac{600a}{3b-\dfrac{a^2}{4b}}=\frac{600a}{\left(3b-\dfrac{a^2}{4b}\right)}\cdot\frac{4b}{4b}=\frac{2400ab}{12b^2-a^2}$$

b.

$$A=25x+20.\frac{\left(\dfrac{50}{x^2+1}\right)}{x}=25x+20.\frac{\left(\dfrac{50}{x^2+1}\right)}{x}\frac{x^2+1}{x^2+1}=25x+20.\frac{50}{x(x^2+1)}$$

c.

$$K=\left(50+\frac{150}{\frac{p}{q}+5}\right)\cdot p=50p+\frac{150p}{\left(\frac{p}{q}+5\right)}\cdot\frac{q}{q}=50p+\frac{150pq}{p+5q}=$$

$$50p\cdot\frac{p+5q}{p+5q}+\frac{150pq}{p+5q}=\frac{50p^2+250pq+150pq}{p+5q}=\frac{50p^2+400pq}{p+5q}$$

21. Gegeven: $N=\dfrac{4p-1}{2p+3}$ en $p=\dfrac{3x}{x+5}$

a.

Invullen geeft : $N=\dfrac{4\left(\frac{3x}{x+5}\right)-1}{2\left(\frac{3x}{x+5}\right)+3}\cdot\dfrac{x+5}{x+5}=\dfrac{12x-(x+5)}{6x+3(x+5)}=\dfrac{11x-5}{9x+15}$

b.

N > 9 $\Rightarrow$ $\dfrac{11x-5}{9x+15}>9$ Eerst het snijpunt $\Rightarrow$

$\dfrac{11x-5}{9x+15}=9\Rightarrow 11x-5=81x+135\Leftrightarrow 70x=-140$

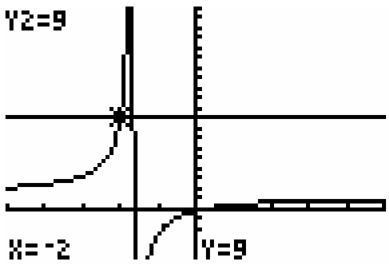
$\Leftrightarrow x=-2$

Nu de schets van de grafieken $\Rightarrow$

Er is een V.A. x = -5/3

Nu aflezen uit de grafiek $\Rightarrow$

N > 9 geeft : -2 < x < -5/3



22.

a. $N=\dfrac{x^2+5x-6}{x}=\dfrac{x^2}{x}+\dfrac{5x}{x}-\dfrac{6}{x}=x+5-\dfrac{6}{x}$

b.

$$A=\frac{5x^2+1000}{x}=\frac{5x^2}{x}+\frac{1000}{x}=5x+\frac{1000}{x}$$

c.

$$K=\frac{6t^2+12t+1500}{3t}=\frac{6t^2}{3t}+\frac{12t}{3t}+\frac{1500}{3t}=2t+4+\frac{500}{t}$$

d.

$$F=\frac{5a^2+8a}{2a^2}=\frac{5a^2}{2a^2}+\frac{8a}{2a^2}=2\tfrac{1}{2}+\frac{4}{a}$$

e.

$$N=\frac{6p^2-3p-1}{2p}=\frac{6p^2}{2p}-\frac{3p}{2p}-\frac{1}{2p}=3p-1\tfrac{1}{2}-\frac{1}{2p}$$

23.

$y=\frac{2}{x} \Leftrightarrow xy=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{y}$ Natuurlijk zijn *x* en *y* ongelijk aan 0.

24.

a.

$$A=\frac{B}{B+2} \Rightarrow A(B+2)=B \Leftrightarrow AB+2A=B \Leftrightarrow AB-B=-2A \Leftrightarrow$$

$$B(A-1)=-2A \Rightarrow B=-\frac{2A}{A-1}$$

b.

$$P=\frac{Q-5}{Q} \Rightarrow PQ=Q-5 \Leftrightarrow PQ-Q=-5 \Leftrightarrow Q(P-1)=-5 \Leftrightarrow Q=-\frac{5}{P-1}$$

c

$$R=\frac{F-2}{F-1} \Rightarrow R(F-1)=F-2 \Leftrightarrow RF-R=F-2 \Leftrightarrow RF-F=R-2 \Leftrightarrow$$

$$F(R-1)=R-2 \Leftrightarrow F=\frac{R-2}{R-1}$$

d.

$$L=320-\frac{18}{q-1} \Rightarrow L(q-1)=320(q-1)-18 \Leftrightarrow Lq-L=320q-320-18 \Leftrightarrow$$

$$Lq-320q=L-338 \Leftrightarrow q(L-320)=L-338 \Leftrightarrow q=\frac{L-338}{L-320}$$

25. Gegeven : $\frac{1}{a}=2+\frac{1}{b}$

a. $\frac{1}{a}=2+\frac{1}{b}=2\cdot\frac{b}{b}+\frac{1}{b}=\frac{2b+1}{b}$

Nu links 1 breuk en rechts 1 breuk.
We nemen nu het omgekeerde van beide breuken. Dan krijgen we :

$$a=\frac{b}{2b+1}$$

b. $\frac{1}{a}=2+\frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{b}=\frac{1}{a}-2=\frac{1}{a}-\frac{2a}{a}=\frac{1-2a}{a} \Rightarrow b=\frac{a}{1-2a}$

26.

a. $\frac{1}{p}=5-\frac{2}{q}=\frac{5q}{q}-\frac{2}{q}=\frac{5q-2}{q} \Rightarrow p=\frac{q}{5q-2}$

$$\frac{1}{p}=5-\frac{2}{q}\Rightarrow\frac{2}{q}=5-\frac{1}{p}=\frac{5p-1}{p}\Rightarrow\frac{q}{2}=\frac{p}{5p-1}\Leftrightarrow q=\frac{2p}{5p-1}$$

b. $$\frac{1}{m}=\frac{1}{2}-\frac{3}{n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n}-\frac{3}{n}\cdot\frac{2}{2}=\frac{n-6}{2n}\Rightarrow m=\frac{2n}{n-6}$$

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{2}-\frac{3}{n}\Leftrightarrow\frac{3}{n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{m}=\frac{m}{2m}-\frac{2}{2m}=\frac{m-2}{2m}\Rightarrow\frac{n}{3}=\frac{2m}{m-2}\Rightarrow n=\frac{6m}{m-2}$$

27.

a. $$\frac{t-2}{t-3}\cdot P=\frac{t}{t-1}\Rightarrow P=\frac{\left(\frac{t}{t-1}\right)}{\left(\frac{t-2}{t-3}\right)}=\frac{t}{t-1}\cdot\frac{t-3}{t-2}=\frac{t^2-3t}{(t-1)(t-2)}$$

b. $$\frac{3x}{x+y}=5-y\Rightarrow 3x=(x+y)(5-y)\Leftrightarrow 3x=5x-yx+5y-y^2\Leftrightarrow$$

$$yx-2x=5y-y^2\Leftrightarrow x(y-2)=5y-y^2\Rightarrow x=\frac{5y-y^2}{y-2}$$

c. $$\frac{1500-N}{N}=50\cdot 0{,}95^t\Rightarrow 1500-N=50\cdot 0{,}95^t\cdot N\Leftrightarrow N50\cdot 0{,}95^t+N=1500\Leftrightarrow$$

$$N\left(50\cdot 0{,}95^t+1\right)=1500\Rightarrow N=\frac{1500}{50\cdot 0{,}95^t+1}$$

d. $$K=90-\frac{2N}{N+0{,}2}\Rightarrow K(N+0{,}2)=90(N+0{,}2)-2N\Leftrightarrow$$

$$KN+0{,}2K=90N+18-2N\Leftrightarrow N(K-88)=18-0{,}2K\Rightarrow N=\frac{18-0{,}2K}{K-88}$$

28.

a. $$F=\frac{1}{K}+\frac{1}{2K}\Leftrightarrow F=\frac{2}{2K}+\frac{1}{2K}\Leftrightarrow F=\frac{3}{2K}\Rightarrow\frac{2K}{3}=\frac{1}{F}\Rightarrow K=\frac{3}{2F}$$

b. $$\frac{1}{T}=10-\frac{2}{S}\Rightarrow\frac{1}{T}=\frac{10S}{S}-\frac{2}{S}\Leftrightarrow\frac{1}{T}=\frac{10S-2}{S}\Rightarrow T=\frac{S}{10S-2}$$

c. $$\frac{1}{N}+3=\frac{2R+2}{5R+2}\Leftrightarrow\frac{1}{N}=\frac{2R+2}{5R+2}-3\cdot\frac{5R+2}{5R+2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{N}=\frac{2R+2}{5R+2}-\frac{15R+6}{5R+2}\Leftrightarrow\frac{1}{N}=\frac{-13R-4}{5R+2}\Rightarrow N=\frac{5R+2}{-13R-4}$$

29.

$$K=\frac{500}{A}+40A+\frac{60}{B}+25B \text{ en } AB=30 \text{ dan } B=\frac{30}{A}\Rightarrow$$

a. $$K=\frac{500}{A}+40A+\frac{60}{\left(\frac{30}{A}\right)}+25\cdot\left(\frac{30}{A}\right)\Leftrightarrow K=\frac{500}{A}+40A+2A+\frac{750}{A}\Leftrightarrow$$

$$K=\frac{1250}{A}+42A$$

$$F=\frac{80}{A-1}+10A+\frac{40}{AB}+5A^3B \text{ en } A^2B=20\Rightarrow B=\frac{20}{A^2}\Rightarrow$$

b. $$F=\frac{80}{A-1}+10A+\frac{40}{A\cdot\left(\frac{20}{A^2}\right)}+5A^3\cdot\left(\frac{20}{A^2}\right)\Leftrightarrow F=\frac{80}{A-1}+10A+2A+100A$$

$$\Leftrightarrow F=\frac{80}{A-1}+112A$$

$$N=2PQ+P\left(PQ-\frac{2}{P}\right) \text{ en } P^2Q=10\Rightarrow Q=\frac{10}{P^2}\Rightarrow$$

c. $$N=2P\cdot\frac{10}{P^2}+P\left(P\cdot\frac{10}{P^2}-\frac{2}{P}\right)\Leftrightarrow N=\frac{20}{P}+10-2\Leftrightarrow N=\frac{20}{P}+8\Rightarrow$$

$$\frac{20}{P}=N-8\Rightarrow\frac{P}{20}=\frac{1}{N-8}\Rightarrow P=\frac{20}{N-8}$$

30.

a. $$y=\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow y=\frac{1+x}{\sqrt{x}}$$

b. $$K=2\sqrt{p+2}+\sqrt{\tfrac{1}{9}p+\tfrac{2}{9}}\Leftrightarrow K=2\sqrt{p+2}+\sqrt{\tfrac{1}{9}(p+2)}\Leftrightarrow$$

$$K=2\sqrt{p+2}+\tfrac{1}{3}\sqrt{p+2}\Leftrightarrow K=2\tfrac{1}{3}\sqrt{p+2}$$

31.

a. $$y=\sqrt{25x}-\sqrt{x}\Leftrightarrow y=5\sqrt{x}-\sqrt{x}\Leftrightarrow y=4\sqrt{x}$$

b. $$y=\sqrt{54x}-\sqrt{24x}=\sqrt{9\cdot 6x}-\sqrt{4\cdot 6x}=3\sqrt{6x}-2\sqrt{6x}=\sqrt{6x}$$

c. $$N=\sqrt{8a}+\sqrt{\tfrac{1}{2}a}=\sqrt{4\cdot 2a}+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{a}=2\sqrt{2a}+\tfrac{1}{2}\sqrt{2a}=2\tfrac{1}{2}\sqrt{2a}$$

d. $$N=\sqrt{20a}+\sqrt{\frac{9a}{5}}=\sqrt{4}.\sqrt{5a}+\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{a}=2\sqrt{5a}+\frac{3}{\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\sqrt{a}=$$

$$2\sqrt{5a}+\frac{3\sqrt{5}}{5}\sqrt{a}=2\sqrt{5a}+\frac{3}{5}\sqrt{5a}=2\frac{3}{5}\sqrt{5a}$$

32.

a. $y=(x+2)\sqrt{x^2+4}-2\sqrt{x^2+4}=(x+2-2)\sqrt{x^2+4}=x\sqrt{x^2+4}$

b. $y=\dfrac{3}{\sqrt{x}}+2\sqrt{x}=\dfrac{3}{\sqrt{x}}+2\sqrt{x}\cdot\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\dfrac{3+2x}{\sqrt{x}}$

c. $N=\dfrac{2-t^2}{t}\sqrt{t}+t\sqrt{t}=\sqrt{t}\left(\dfrac{2-t^2}{t}+t\right)=\sqrt{t}\left(\dfrac{2-t^2}{t}+t\cdot\dfrac{t}{t}\right)=\sqrt{t}\left(\dfrac{2-t^2}{t}+\dfrac{t^2}{t}\right)=$

$\sqrt{t}\left(\dfrac{2}{t}\right)=\dfrac{2\sqrt{t}}{t}$

d. $N=\dfrac{t+1}{\sqrt{2t+1}}-\sqrt{2t+1}=\dfrac{t+1}{\sqrt{2t+1}}-\sqrt{2t+1}\cdot\dfrac{\sqrt{2t+1}}{\sqrt{2t+1}}=\dfrac{t+1}{\sqrt{2t+1}}-\dfrac{2t+1}{\sqrt{2t+1}}=\dfrac{-t}{\sqrt{2t+1}}$

33.

a. $A=\sqrt{12b}-6\sqrt{\tfrac{3}{16}b}=2\sqrt{3b}-\dfrac{6}{4}\sqrt{3b}=\tfrac{1}{2}\sqrt{3b}$

b. $B=\dfrac{5a}{2\sqrt{a}}-\sqrt{2\tfrac{1}{4}a}=2\tfrac{1}{2}\sqrt{a}-\sqrt{\dfrac{9}{4}a}=2\tfrac{1}{2}\sqrt{a}-1\tfrac{1}{2}\sqrt{a}=\sqrt{a}$

c. $y=\dfrac{x^2+4}{\sqrt{x-2}}-x\sqrt{x-2}=\dfrac{x^2+4}{\sqrt{x-2}}-x\sqrt{x-2}\cdot\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}=\dfrac{x^2+4}{\sqrt{x-2}}-\dfrac{x(x-2)}{\sqrt{x-2}}=\dfrac{2x+4}{\sqrt{x-2}}$

d. $N=\dfrac{3t^2}{(t-1)\sqrt{t-1)}}-3\sqrt{t-1}=\dfrac{3t^2}{(t-1)\sqrt{t-1)}}-3\sqrt{t-1}\cdot\dfrac{(t-1)\sqrt{t-1}}{(t-1)\sqrt{t-1}}=$

$\dfrac{3t^2}{(t-1)\sqrt{t-1)}}-\dfrac{3(t-1)^2}{(t-1)\sqrt{t-1}}=\dfrac{3t^2-3t^2+6t-3}{(t-1)\sqrt{t-1}}=\dfrac{6t-3}{(t-1)\sqrt{t-1}}$

34. $f(x)=x^2\cdot\sqrt{2x+5}$

a. $f'(x)=2x.\sqrt{2x+5}+x^2.\dfrac{1}{2\sqrt{2x+5}}.2=2x.\sqrt{2x+5}+\dfrac{x^2}{\sqrt{2x+5}}=$

$2x.\sqrt{2x+5}\cdot\dfrac{\sqrt{2x+5}}{\sqrt{2x+5}}+\dfrac{x^2}{\sqrt{2x+5}}=\dfrac{2x(2x+5)+x^2}{\sqrt{2x+5}}=\dfrac{5x^2+10x}{\sqrt{2x+5}}$

$\Rightarrow$ $a=5$ en $b=10$

b. Voor de top geldt : $f'(x)=0\Rightarrow 5x^2+10x=0\Rightarrow 5x(x+2)=0\Rightarrow x=0\vee x=-2$

Alleen $x = -2$ voldoet. $\Rightarrow$ Top A (-2 , 4)

c. $F(x)=(px^2+qx+r)(2x+5)^{1\frac{1}{2}}\Rightarrow$

$F'(x)=(2px+q)(2x+5)^{1\frac{1}{2}}+(px^2+qx+r).1\tfrac{1}{2}.(2x+5)^{\frac{1}{2}}.2$

$=(2px+q)(2x+5)\sqrt{2x+5}+3(px^2+qx+r)\sqrt{2x+5}$

$= (4px^2 + 10px + 2qx + 5q)(\sqrt{2x+5} + (3px^2 + 3qx + 3r)\sqrt{2x+5} =$

$= (7px^2 + 10px + 5qx + 5q + 3r)\sqrt{2x+5}$

Dit moet gelijk zijn aan $f(x) = x^2\sqrt{2x+5}$ voor alle waarden van x in het domein. $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 7p = 1 \\ 10p + 5q = 0 \\ 5q + 3r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{1}{7} \\ \frac{10}{7} + 5q = 0 \Rightarrow q = -\frac{2}{7} \\ -\frac{10}{7} + 3r = 0 \Rightarrow r = \frac{10}{21} \end{cases}$$

d. $Opp. = \int_{-2\frac{1}{2}}^{0} x^2\sqrt{2x+5}dx = \left[\left(\frac{1}{7}x^2 - \frac{2}{7}x + \frac{10}{21}\right)(2x+5)\sqrt{2x+5}\right]_{-2\frac{1}{2}}^{0} =$

$= \left(0 + 0 + \frac{10}{21}\right)5\sqrt{5} - \left(\left(\frac{25}{28} + \frac{10}{14} + \frac{10}{21}\right)(0)\right) = \frac{50}{21}\sqrt{5}$

35.

a. $y = 2\sqrt{x} \Rightarrow y^2 = 4x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}y^2$ met $y \geq 0$

b. $y = \sqrt{x-2} \Rightarrow x - 2 = y^2 \Leftrightarrow x = y^2 + 2$ met $y \geq 0$

c. $y = 2\sqrt{x-2} \Rightarrow 4(x-2) = y^2 \Leftrightarrow 4x - 8 = y^2 \Leftrightarrow 4x = y^2 + 8 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}y^2 + 2$
met $y \geq 0$

36.

a. $R = 2\sqrt{4A-1} \Rightarrow 4(4A-1) = R^2 \Leftrightarrow 16A - 4 = R^2 \Leftrightarrow 16A = R^2 + 4 \Leftrightarrow$
$A = \frac{1}{16}R^2 + \frac{1}{4}$

b. $A = 6 - \dfrac{2}{\sqrt{B}} \Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{B}} = 6 - A \Rightarrow \dfrac{\sqrt{B}}{2} = \dfrac{1}{6-A} \Rightarrow \sqrt{B} = \dfrac{2}{6-A} \Rightarrow B = \dfrac{4}{(6-A)^2}$

c. $x\sqrt{y} - 2x = 4 \Rightarrow x\sqrt{y} = 4 + 2x \Rightarrow \sqrt{y} = \dfrac{4+2x}{x} \Rightarrow y = \dfrac{(4+2x)^2}{x^2}$

d. $\dfrac{p\sqrt{q}}{q} - \sqrt{p} = 4 \Leftrightarrow \dfrac{p}{\sqrt{q}} = 4 + \sqrt{p} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{q}}{p} = \dfrac{1}{4+\sqrt{p}} \Rightarrow \sqrt{q} = \dfrac{p}{4+\sqrt{p}} \Rightarrow$
$q = \dfrac{p^2}{\left(4+\sqrt{p}\right)^2}$

37. Gegeven : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}+1$

a. $f'(x)=-\frac{1}{2}(x+1)^{-1,5} \Rightarrow f'(0)=-\frac{1}{2}$

Het raakpunt is (0 , 2) $\Rightarrow$

De vergelijking van *k* is : $y=-\frac{1}{2}x+2$

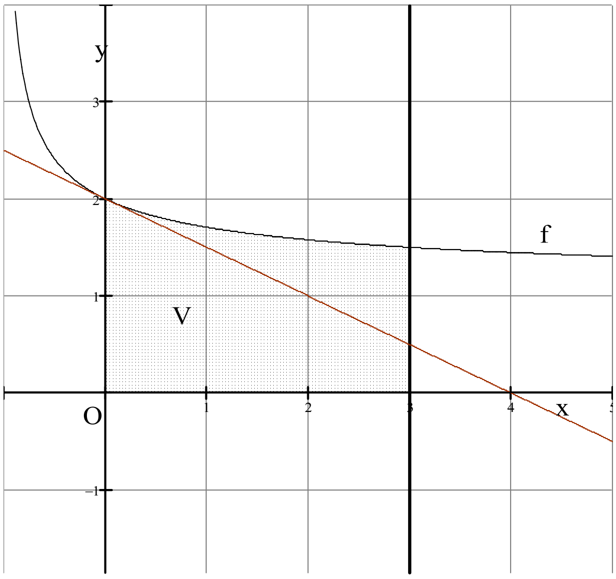
$$O(V)=\int_0^3\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}+1\right)dx=$$

$$\left[2\sqrt{x+1}+x\right]_0^3=7-2=5$$

$$O(onder)=\int_0^3(-\tfrac{1}{2}x+2)dx=\left[-\tfrac{1}{4}x^2+2x\right]_0^3$$

$= 3{,}75 \Rightarrow$

De verhouding is nu : $\frac{5-3{,}75}{3{,}73}=\frac{1{,}25}{3{,}75}=\frac{1}{3}$



b. Wentelen om de y-as $\Rightarrow$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}+1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}}=y-1 \Rightarrow \sqrt{x+1}=\frac{1}{y-1} \Rightarrow x+1=\frac{1}{(y-1)^2}$$

$x=\frac{1}{(y-1)^2}-1$ $\qquad$ $f(3) = 1{,}5 \Rightarrow$

$$I=\pi.3^2.1\tfrac{1}{2}+\pi\int_{1\frac{1}{2}}^{2}x^2dy=13{,}5\pi+\pi\int_{1\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{(y-1)^2}-1\right)^2dy=$$

$$13{,}5\pi+\pi\int_{1,5}^{2}\left(\frac{1}{(y-1)^4}-\frac{2}{(y-1)^2}+1\right)dy=$$

$$13{,}5\pi+\pi\left[-\tfrac{1}{3}(y-1)^{-3}+2(y-1)^{-1}+y\right]_{1,5}^{2}=$$

$$13{,}5\pi+\pi\left[\left(-\tfrac{1}{3}+2+2\right)-\left(-\tfrac{8}{3}+4+1{,}5\right)\right]=13{,}5\pi+\tfrac{5}{6}\pi=14\tfrac{1}{3}\pi$$

38.

a. $\frac{1}{x^3}=x^{-3}$ $\qquad$ c. $x\sqrt{x}=x^{1\frac{1}{2}}$ $\qquad$ e. $\frac{x^6}{x^2}=x^4$

b. $\sqrt[4]{x^3}=x^{\frac{3}{4}}$ $\qquad$ d. $x^3.x^2=x^5$ $\qquad$ f. $\frac{x}{\sqrt{x}}=x^{\frac{1}{2}}$

39.

a. $x^5=18 \Leftrightarrow x=\sqrt[5]{18}$

b. $\sqrt[3]{x}=4 \Leftrightarrow x=4^3 \Leftrightarrow x=64$

40.

a. $y=\frac{6}{x}.x^{1,4}=6x^{0,4}$

b. $y=\frac{15}{x^2\sqrt{x}}.\sqrt[4]{x}=\frac{15.x^{\frac{1}{4}}}{x^{2\frac{1}{2}}}=15x^{\frac{1}{4}-2\frac{1}{2}}=15x^{-2\frac{1}{4}}$

c. $y=\left(2x^{0,4}\right)^3.5x^{0,5}=8.x^{1,2}.5x^{0,5}=40x^{1,7}$

d. $y=\left(4\sqrt{x}\right)^3.\left(\tfrac{1}{2}x\right)^4=64x^{1\frac{1}{2}}.\frac{1}{16}.x^4=4x^{5\frac{1}{2}}$

41.

a. $y=\tfrac{1}{3}.\sqrt[3]{x}-7 \Leftrightarrow \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{x}=y+7 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x}=3y+21 \Leftrightarrow x=(3y+21)^3$

b. $P=\tfrac{1}{2}.\sqrt[4]{2q-1}+3 \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}.\sqrt[4]{2q-1}=P-3 \Leftrightarrow \sqrt[4]{2q-1}=2P-6 \Rightarrow$

$2q-1=(2P-6)^4 \Leftrightarrow 2q=(2P-6)^4+1 \Leftrightarrow q=\tfrac{1}{2}(2P-6)^4+\tfrac{1}{2}$

c. $T=\tfrac{1}{16}S^4 \Leftrightarrow S^4=16T \Rightarrow S=\sqrt[4]{16T} \Leftrightarrow S=2.\sqrt[4]{T}=2\cdot T^{\frac{1}{4}}$

d. $A=15.(4B)^{-1,6} \Leftrightarrow (4B)^{-1,6}=\frac{A}{15} \Rightarrow 4B=\left(\frac{A}{15}\right)^{\frac{1}{-1,6}} \Leftrightarrow B=\tfrac{1}{4}.\left(\frac{A}{15}\right)^{\frac{1}{-1,6}} \Leftrightarrow$

$B=\tfrac{1}{4}.\frac{A^{\frac{1}{-1,6}}}{15^{\frac{1}{-1,6}}} \Leftrightarrow B=1,358.A^{\frac{1}{-1,6}}$

d. $y=\frac{1536}{a^5}$ en $a=4\sqrt{x^2+20} \Rightarrow y=\frac{1536}{\left(4\sqrt{x^2+20}\right)^5}=\frac{1536}{4^5.\left(x^2+20\right)^{2\frac{1}{2}}}=$

$\frac{1536}{4^5}.\left(x^2+20\right)^{-2\frac{1}{2}}=1,5.\left(x^2+20\right)^{-2\frac{1}{2}}$

42.

a. $P=20\cdot\left(3x^{0,6}\right)^2.\left(2y^3\right)^{0,8}=20.9.x^{1,2}.2^{0,8}.y^{2,4}=313,40\cdot x^{1,2}.y^{2,4}$

b. $L=0,6.(5t)^{0,35}.(6s)^{0,18}$ en $s=\frac{1}{3}t^3$

$L=0,6.(5t)^{0,35}.\left(2t^3\right)^{0,18}=0,6\cdot 5^{0,35}\cdot t^{0,35}\cdot 2^{0,18}\cdot t^{0,54}=1,19\cdot t^{0,89}$

43.

a. $V = 6.(5R)^{1,8} \Leftrightarrow V = 6\ .\ 5^{1,8}.R^{1,8} \Leftrightarrow R^{1,8} = \dfrac{V}{6.5^{1,8}} \Rightarrow R = \dfrac{1}{\left(6.5^{1,8}\right)^{\frac{1}{1,8}}}.V^{\frac{1}{1,8}} \Leftrightarrow$

$R = 0,07.V^{\frac{5}{9}}$

b.

$S = \frac{2}{5}.\sqrt[3]{4t} + 2 \Leftrightarrow \frac{2}{5}.\sqrt[3]{4t} = S - 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{4t} = 2\frac{1}{2}S - 5 \Leftrightarrow$

$4t = \left(2\frac{1}{2}S - 5\right)^3 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}.\left(2\frac{1}{2}S - 5\right)^3$

c.

$K = 8a^3$ en $O = 16a^2 \Rightarrow a^2 = \dfrac{1}{16}.O \Rightarrow a = \frac{1}{4}.O^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$K = 8.\left(\frac{1}{4}.O^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \dfrac{8}{4^3}.O^{1\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}O\sqrt{O}$

Nu andersom : $K = \dfrac{1}{8}.O^{1\frac{1}{2}} \Leftrightarrow O^{\frac{3}{2}} = 8K \Leftrightarrow O = (8K)^{\frac{2}{3}} = 4.K^{\frac{2}{3}}$

d.

$F = 2(r-3)^4$ en $L = 4(r-3)^3 \Rightarrow (r-3)^3 = \frac{1}{4}L \Rightarrow r - 3 = \left(\frac{1}{4}L\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$

$F = 2.\left(\left(\frac{1}{4}L\right)^{\frac{1}{3}}\right)^4 = 2.\left(\frac{1}{4}L\right)^{\frac{4}{3}} = 0,315.L^{\frac{4}{3}}$

Nu andersom $\Rightarrow$ $F = 0,315.L^{\frac{4}{3}} \Rightarrow L^{\frac{4}{3}} = 3,175F \Leftrightarrow L = 2,378.F^{\frac{3}{4}}$

44. $y = 2^x.2^{3x+1} = 2^{4x+1} = 2^1.\left(2^4\right)^x = 2\ .\ 16^x$

45.

a. $10^{\log(2)} = 2$ en $e^{\ln(7)} = 7$

b. $3 = 10^{\log(3)}$ en $5 = e^{\ln(5)}$

46.

a. $N = 25.1,3^{4t-2} = 25.1,3^{-2}.1,3^{4t} = 14,79.\left(1,3^4\right)^t = 14,79\ .\ 2,86^t$

b. $N = 180.0,8^{5-t} = 180.0,8^5.0,8^{-t} = 58,98\ .\ \left(0,8^{-1}\right)^t = 58,98\ .\ 1,25^t$

47.

a. $N = 3^t.3^{t+3} = 3^{3+2t} = 3^3.\left(3^2\right)^t = 27\ .\ 9^t$

b. $N = \left(\frac{1}{2}\right)^{t-3}.\left(\frac{1}{2}\right)^{-3t+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1-2t} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2t} = 2 \cdot 4^t$

c. $N = 3^{2t-1}.9^{t+1} = 3^{2t-1}.3^{2t+2} = 3^{4t}.3^{1} = 3\ .\ 81^{t}$

d. $N = \left(\frac{1}{4}\right)^{t+1}.2^{3t+4} = \left(2^{-2}\right)^{t+1}.2^{3t+4} = 2^{-2t-2}.2^{3t+4} = 2^{t}.2^{2} = 4\ .\ 2^{t}$

48.

a. $y = 15\ .\ 5^{x-1} = 15\ .\ \left(10^{\log(5)}\right)^{x-1} = 15\ .\ 10^{x.\log(5)}.10^{-\log(5)} = 3\ .\ 10^{0,70x}$

b. $y = 15.\ 5^{x-1} = 15.5^{x}.5^{-1} = 3.5^{x} = 3\cdot\left(e^{\ln(5)}\right)^{x} = 3\cdot e^{x.\ln(5)} = 3\cdot e^{1,61x}$

c.

$$T = 37,2\cdot 1,7^{3t-2} = 37,2\cdot 1,7^{-2}\cdot\left(10^{\log(1,7)}\right)^{3t} = 12,87\cdot 10^{0,69t}$$

d.

$$T = 37,2\cdot 1,7^{3t-2} = 10^{\log(37,2)}\cdot\left(10^{\log(1,7)}\right)^{3t-2} = 10^{\log(37,2)}\cdot 10^{3t\log(1,7)}\cdot 10^{-2\cdot\log(1,7)} = =$$

$$10^{1,11}\cdot 10^{0,69t} = 10^{0,69t+1,11}$$

49.

a. $N = 18 - 5(6 - 1,5^{4t}) = 18 - 30 + 5\cdot 1,5^{4t} = -12 + 5\cdot 5,06^{t}$

b. $N = \dfrac{8^{2t+1}}{4^{t-1}} = \dfrac{8^{1}}{4^{-1}}\cdot\dfrac{64^{t}}{4^{t}} = 32\cdot 16^{t}$

c.

$$K = 150\cdot 1,12^{6q+3} = e^{\ln(150)}\cdot\left(e^{\ln(1,12)}\right)^{6q+3} = e^{\ln(150)}\cdot e^{3\cdot\ln(1,12)}\cdot e^{\ln(1,12)\cdot 6q} = e^{0,68q+5,35}$$

50.

a. $T = 27\cdot 0,4^{t}\cdot(3 - 0,4^{2t}) = 81\cdot 0,4^{t} - 27\cdot 0,4^{t}\cdot 0,4^{2t} = 81\cdot 0,4^{t} - 27\cdot 0,064^{t}$

b. $P = 3^{2t+1}\cdot 2^{3t+1} = 3\cdot 3^{2t}\cdot 2\cdot 2^{3t} = 6\cdot 9^{t}\cdot 8^{t} = 6\cdot 72^{t} = 6\cdot\left(e^{\ln(72)}\right)^{t} = 6\cdot e^{4,28t}$

51 $y = e^{x-1} \Leftrightarrow x - 1 = \ln(y) \Leftrightarrow x = 1 + \ln(y)$

52.

a.

$$y = 20\cdot 3^{x-4} \Leftrightarrow 3^{x-4} = \frac{y}{20} \Leftrightarrow x - 4 = {}^{3}\log\left(\frac{y}{20}\right) = \frac{\log\left(\frac{y}{20}\right)}{\log(3)} \Leftrightarrow$$

$$x = 4 + \frac{\log(y) - \log(20)}{\log(3)} = 4 - \frac{\log(20)}{\log(3)} + \frac{1}{\log(3)}\cdot\log(y) = 1,27 + 2,10\cdot\log(y)$$

b.

$$y=0,65\cdot 1,16^{x-1}\Leftrightarrow 1,16^{x-1}=\frac{y}{0,65}\Leftrightarrow x-1={}^{1,16}\log\left(\frac{y}{0,65}\right)\Leftrightarrow$$

$$x=1+\frac{\ln\left(\frac{y}{0,65}\right)}{\ln(1,16)}=1+\frac{\ln(y)-\ln(0,65)}{\ln(1,16)}=1-\frac{\ln(0,65)}{\ln(1,16)}+\frac{1}{\ln(1,16)}\cdot\ln(y)=$$

$$3,90+6,74\cdot\ln(y)$$

c.

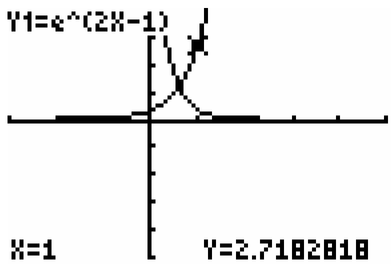
$$N=250\cdot 10^{2t-3}\Leftrightarrow 10^{2t-3}=\frac{N}{250}\Leftrightarrow 2t-3=\log\left(\frac{N}{250}\right)\Leftrightarrow$$

$$2t=3+\log\left(\frac{N}{250}\right)\Leftrightarrow t=1\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{N}{250}\right)$$

d. $P=120\cdot e^{3-q}\Leftrightarrow e^{3-q}=\dfrac{P}{120}\Leftrightarrow 3-q=\ln\left(\dfrac{P}{120}\right)\Leftrightarrow q=3-\ln\left(\dfrac{P}{120}\right)$

53. $f(x)=e^{2x-1}$ en $g(x)=e^{2-3x}$

a. Zie de schets.



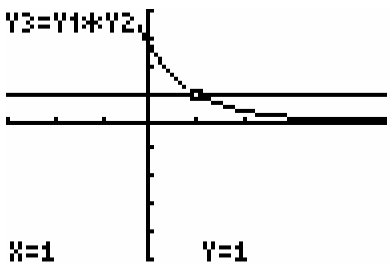
Eerst de coördinaat van het snijpunt berekenen. ⇒

$$e^{2x-1}=e^{2-3x}\Leftrightarrow 2x-1=2-3x\Leftrightarrow 5x=3\Leftrightarrow x=0,6$$

$$O=\int_0^{0,6}\left(e^{2-3x}-e^{2x-1}\right)dx=\left[-\tfrac{1}{3}e^{2-3x}-\tfrac{1}{2}e^{2x-1}\right]_0^{0,6}=$$

$$\left[-\tfrac{1}{3}e^{2-3x}-\tfrac{1}{2}e^{2x-1}\right]_0^{0,6}=\left(-\tfrac{1}{3}e^{0,2}-\tfrac{1}{2}e^{0,2}\right)-\left(-\tfrac{1}{3}e^{2}-\tfrac{1}{2}e^{-1}\right)=\tfrac{1}{3}e^{2}-\tfrac{5}{6}e^{0,2}+\tfrac{1}{2}e^{-1}$$

b. $h(x)=f(x)\cdot g(x)=e^{2x-1+2-3x}=e^{1-x}$



Zie weer de figuur.

Snijpunt y-as : (0 , e) ⇒

$I=\pi\int_1^e x^2dy$ Eerst x in y uitdrukken ⇒

$$y=e^{1-x}\Leftrightarrow 1-x=\ln(y)\Leftrightarrow x=1-\ln(y)$$

c. $I=\pi\int_1^e x^2dy=\pi\int_1^e\left(1-\ln(y)\right)^2dy$

$$F=y\ln^2(y)-4y\ln(y)+5y\Rightarrow$$

$$F'(x)=\ln^2(y)+2y\ln(y)\cdot\frac{1}{y}-4\ln(y)-4y\cdot\frac{1}{y}+5=$$

$$\ln^2(y)+2\ln(y)-4\ln(y)+1=\ln^2(y)-2\ln(y)+1=\left(1-\ln(y)\right)^2$$

$\Rightarrow$ F is een primitieve van $\left(1-\ln(y)\right)^2$

d.

$$I=\pi\int_1^e \left(1-\ln(y)\right)^2\,dx=\pi\left[y\ln^2(y)-4y\ln(y)+5y\right]_1^e=$$

$$\pi(e-4e+5e)-\pi(5)=2\pi e-5\pi$$

54.

$$y=\tfrac{1}{2}\cdot{}^3\log(x)-2\Leftrightarrow 2y+4={}^3\log(x)\Leftrightarrow x=3^{2y+4}=3^4\cdot 3^{2y}=81\cdot 9^y$$

55.

a. $\log(N)=2{,}15+0{,}07t\Leftrightarrow N=10^{2{,}15+0{,}07t}=10^{2{,}15}\cdot\left(10^{0{,}07}\right)^t\approx 141\cdot 1{,}175^t$

b. $\log(P)=2{,}85+0{,}75\log(q)\Leftrightarrow P=10^{2{,}85+0{,}75\log(q)}=10^{2{,}85}\cdot\left(10^{\log(q)}\right)^{0{,}75}\approx 708\cdot q^{0{,}75}$

c.

$$y=\tfrac{1}{4}\cdot\ln(5x+2)+3\Leftrightarrow\tfrac{1}{4}\cdot\ln(5x+2)=y-3\Leftrightarrow\ln(5x+2)=4y-12\Leftrightarrow$$

$$5x-2=e^{4y-12}\Leftrightarrow 5x=e^{4y-12}+2\Leftrightarrow x=\frac{e^{4y-12}+2}{5}$$

d.

$$\ln(2A+3)=5+\ln(B)\Leftrightarrow\ln(2A+3)=\ln\left(e^5\right)+\ln(B)\Leftrightarrow\ln(2A+3)=\ln\left(e^5B\right)\Leftrightarrow$$

$$2A+3=e^5B\Leftrightarrow 2A=e^5B-3\Leftrightarrow A=\tfrac{1}{2}e^5B-1\tfrac{1}{2}$$

56.

a. $F=2\log(N)-0{,}4\Leftrightarrow 2\log(N)=F+0{,}4\Leftrightarrow\log(N)=\tfrac{1}{2}F+0{,}2\Leftrightarrow N=10^{\frac{1}{2}F+0{,}2}$

b.

$$D=\log(4Q+1)+1\Leftrightarrow\log(4Q+1)=D-1\Leftrightarrow 4Q-1=10^{D-1}\Leftrightarrow$$

$$4Q=10^{D-1}+1\Leftrightarrow Q=\frac{10^{D-1}+1}{4}$$

c.

$$K\sqrt{2}=\ln(2R-3)-\sqrt{6}\Leftrightarrow\ln(2R-3)=K\sqrt{2}+\sqrt{6}\Leftrightarrow 2R-3=e^{K\sqrt{2}+\sqrt{6}}\Leftrightarrow$$

$$2R=e^{K\sqrt{2}+\sqrt{6}}+3\Leftrightarrow R=\tfrac{1}{2}\left(e^{\sqrt{2}}\right)^K\cdot e^{\sqrt{6}}+1\tfrac{1}{2}\Leftrightarrow R=5{,}8\cdot 4{,}1^K+1\tfrac{1}{2}$$

d.

$${}^2\log(3x-1)=-4+{}^2\log(2y+1)\Leftrightarrow{}^2\log(2y+1)={}^2\log(3x-1)+4\Leftrightarrow$$

$${}^2\log(2y+1)={}^2\log(3x-1)+{}^2\log(16)\Leftrightarrow{}^2\log(2y+1)={}^2\log\left((3x-1)\cdot 16\right)\Leftrightarrow$$

$$2y+1=48x-16\Leftrightarrow 2y=48x-17\Leftrightarrow y=24x-8\tfrac{1}{2}$$

57.

$$\log(a+b)=\log(a)+\log(b) \Leftrightarrow \log(a+b)=\log(ab) \Leftrightarrow a+b=a\cdot b \Leftrightarrow$$

$$a\cdot b-a=b \Leftrightarrow a(b-1)=b \Rightarrow a=\frac{b}{b-1}$$

58. Gegeven : $\log(N)=5{,}3-1{,}7\cdot\log(D)$

a. diameter is 0,5m = 50 cm $\Rightarrow$ D = 50 $\Rightarrow$
$\log(N)=5{,}3-1{,}7\cdot\log(50) \Leftrightarrow \log(N)\approx 2{,}411..... \Leftrightarrow N\approx 258 \Rightarrow$
Het aantal bomen per ha is dan ongeveer 258.

b. Op 8 ha staan 2000 bomen $\Rightarrow$ Per ha dus 250 bomen $\Rightarrow$ $N = 250 \Rightarrow$
$\log(250)=5{,}3-1{,}7\cdot\log(D) \Leftrightarrow 1{,}7\log(D)=5{,}3-\log(250) \Leftrightarrow$

$$\log(D)=\frac{5{,}3-\log(250)}{1{,}7} \Leftrightarrow \log(D)\approx 1{,}707....\Rightarrow D\approx 10^{1{,}707...}\approx 50{,}9\,cm$$

c.

$$\log(N)=5{,}3-1{,}7\cdot\log(D) \Leftrightarrow 1{,}7\log D=5{,}3-\log(N) \Leftrightarrow \log(D)=$$

$$\frac{5{,}3}{1{,}7}-\frac{1}{1{,}7}\cdot\log(N) \Leftrightarrow D=10^{\frac{53}{17}-\frac{1}{1{,}7}\cdot\log(N)}=10^{\frac{53}{17}}\cdot 10^{\log\left(N^{-\frac{1}{1{,}7}}\right)}\approx 1310\cdot N^{-\frac{1}{1{,}7}}\approx 1310\cdot N^{-0{,}59}$$

59. Gegeven : $s=290\log(G+100)-550$

a. Spanwijdte is 1,85 m $\Rightarrow$ G = 185 $\Rightarrow$ $s=290\log(185+100)-550\approx 161{,}9$
$\Rightarrow$ De schofthoogte is ongeveer 162 cm

b. Schofthoogte is 2,10 m = 210 cm $\Rightarrow$ $s = 210 \Rightarrow$ $210=290\log(G+100)-550$

$$290\log(G+100)=760 \Leftrightarrow \log(G+100)=\frac{760}{290} \Leftrightarrow G+100=10^{\frac{76}{29}} \Leftrightarrow$$

$G\approx 317{,}5$ $\Rightarrow$ De spanwijdte is dan ongeveer 318 cm.

c.

$$s=290\log(G+100)-550 \Leftrightarrow 290\log(G+100)=s+550 \Leftrightarrow$$

$$\log(G+100)=\frac{s+550}{290} \Leftrightarrow G+100=10^{\frac{s+550}{290}} \Leftrightarrow G=10^{\frac{s+550}{290}}-100 \Leftrightarrow$$

$$G=10^{\frac{1}{290}\cdot s}\cdot 10^{\frac{55}{29}}-100 \Leftrightarrow G=78{,}80\cdot 1{,}008^{s}-100$$

d. In de laatste zin staat de informatie. Voer de formule van onderdeel c in.
Als s = 180 dan G ≈ 231 en als s = 220 dan G ≈ 355 $\Rightarrow$
De spanwijdten variëren dan tussen 220 cm en 355 cm.

60. $y = x^2 + bx + c$

a. Door het punt (-1,6) $\Rightarrow$ $6 = 1^2 + b\cdot 1 + c \Leftrightarrow b + c = 5$
Ook door het punt (4,11) $\Rightarrow$ $11 = 16 + 4b + c \Leftrightarrow 4b + c = -5$

b. $\begin{cases} -b + c = 5 \\ 4b + c = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = b + 5 \\ 4b + b + 5 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b = -10 \\ c = b + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$

61. Gegeven : $y = \dfrac{x^2 + a}{x^2 + b}$

a. Punt $(1, 4\tfrac{1}{2}) \Rightarrow \dfrac{1+a}{1+b} = 4\tfrac{1}{2}$

Door punt $(2, 2\tfrac{2}{5}) \Rightarrow \dfrac{4+a}{4+b} = 2\tfrac{2}{5}$

Dit combineren $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{1+a}{1+b} = \dfrac{9}{2} \\ \dfrac{4+a}{4+b} = \dfrac{12}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2a = 9 + 9b \\ 20 + 5a = 48 + 12b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 9b = 7 \\ 5a - 12b = 28 \end{cases} \begin{vmatrix} -5 \\ 2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -10a + 45b = -35 \\ 10a - 24b = 56 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 21b = 21 \\ 2a - 9b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 1 \end{cases}$$

b. Gegeven: $y = \dfrac{x^2 + a}{\sqrt{x + b}}$

Door punt (-5,15) $\Rightarrow$ $\dfrac{25 + a}{\sqrt{-5 + b}} = 15 \Rightarrow 25 + a = 15\sqrt{-5 + b}$

Door het punt $(0, 1\tfrac{2}{3}) \Rightarrow \dfrac{a}{\sqrt{b}} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow 3a = 5\sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{b} = \tfrac{3}{5}a \Rightarrow b = \tfrac{9}{25}a^2$

Combineren geeft :

$$\begin{cases} 25 + a = 15\sqrt{-5 + b} \\ b = \tfrac{9}{25}a^2 \end{cases} \Rightarrow 25 + a = 15\sqrt{-5 + \tfrac{9}{25}a^2} \Rightarrow$$

$$625 + 50a + a^2 = 225\left(-5 + \tfrac{9}{25}a^2\right) \Leftrightarrow 625 + 50a + a^2 = -1125 + 81a^2 \Leftrightarrow$$

$$80a^2 - 50a - 1750 = 0 \Leftrightarrow 8a^2 - 5a - 175 = 0 \Rightarrow D = 5625 \Rightarrow$$

$$a = \frac{5 + 75}{16} = 5 \text{ voldoet } \vee a = \frac{5 - 75}{16} = -\frac{70}{16} \text{ voldoet niet}$$

Als $a = 5$ dan $b = 9$

62a.

$$\begin{cases} x^2+2y^2=18 \\ x^2+y=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=18-2y^2 \\ x^2=17-y \end{cases} \Rightarrow 18-2y^2=17-y \Leftrightarrow 2y^2-y-1=0 \Rightarrow$$

$$D=1-4\cdot 2\cdot(-1)=9 \Rightarrow y=\frac{1+3}{4}=1 \vee y=\frac{1-3}{4}=-\tfrac{1}{2} \Rightarrow$$

Als y = 1 dan $x^2=16 \Rightarrow x=4 \vee x=-4$

Als y = -$\tfrac{1}{2}$ dan $x^2=17\tfrac{1}{2}=\frac{35}{2}=\frac{70}{4} \Leftrightarrow x=\tfrac{1}{2}\sqrt{70} \vee x=-\tfrac{1}{2}\sqrt{70}$

We krijgen dan : $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\tfrac{1}{2}\sqrt{70} \\ y=-\tfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\tfrac{1}{2}\sqrt{70} \\ y=-\tfrac{1}{2} \end{cases}$

b.

$$\begin{cases} x^2+2y^2=19 \\ xy=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+2\cdot\frac{9}{x^2}=19 \\ y=\frac{3}{x} \end{cases} \Rightarrow x^4+18=19x^2 \Leftrightarrow x^4-19x^2+18=0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2-18)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x^2=18 \vee x^2=1 \Leftrightarrow$$

$$x=\sqrt{18}=3\sqrt{2} \vee x=-3\sqrt{2} \vee x=-1 \vee x=1$$

Dit geeft als resultaat:

$$\begin{cases} x=3\sqrt{2} \\ y=\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} -3\sqrt{2} \\ y=-\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$$

c.

$$\begin{cases} a+b=8 \\ 2^a+2^{b-1}=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=8-a \\ 2^a+2^{7-a}=24 \end{cases} \Rightarrow 2^a+\frac{2^7}{2^a}=24 \quad \text{Stel } 2^a=p \Rightarrow$$

$$p+\frac{128}{p}=24 \Rightarrow p^2-24p+128=0 \Rightarrow D=64 \Rightarrow p=\frac{24\pm 8}{2} \Rightarrow$$

$$2^a=16 \Leftrightarrow a=4 \vee 2^a=8 \Leftrightarrow a=3$$

Als a = 4 dan b = 4 en als a = 3 dan b = 5

d.

$$\begin{cases} a+2b=14 \\ {}^2\log(a)+{}^2\log(b-1)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=14-2b \\ {}^2\log(14-2b)+{}^2\log(b-1)=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$${}^2\log\left((14-2b)(b-1)\right)=4 \Leftrightarrow (14-2b)(b-1)=16 \Leftrightarrow -2b^2+16b-14=16 \Leftrightarrow$$

$$b^2-8b+15=0 \Leftrightarrow (b-5)(b-3)=0 \Leftrightarrow b=5 \vee b=3$$

Als b = 5 dan a = 4 en als b = 3 dan a = 8

63. Gegeven : $f_{p,q}(x)=\dfrac{3^{x+p}+1}{3^{x+q}-1}$

a.
$f_{0,0}(x)=\dfrac{3^x+1}{3^x-1}$

$f(a)=\dfrac{3^a+1}{3^a-1}$ en $f(-a)=\dfrac{3^{-a}+1}{3^{-a}-1}\cdot\dfrac{3^a}{3^a}=\dfrac{3^0+3^a}{3^0-3^a}=\dfrac{3^a+1}{-3^a+1}=-\dfrac{3^a+1}{3^a-1}$

⇒ De functie $f_{0,0}$ is dus symmetrisch in O.

b. $f_{-1,-1}(x)=\dfrac{3^{x-1}+1}{3^{x-1}-1}=\dfrac{3^x\cdot\frac{1}{3}+1}{3^x\cdot\frac{1}{3}-1}=\dfrac{3^x\cdot\frac{1}{3}+1}{3^x\cdot\frac{1}{3}-1}\cdot\dfrac{3}{3}=\dfrac{3^x+3}{3^x-3}$

c. Uit het gegeven volgt het volgende stelsel :

$$\begin{cases}\dfrac{3^{3+p}+1}{3^{3+q}-1}=\dfrac{1}{4}\\[2ex]\dfrac{3^{5+p}+1}{3^{5+q}-1}=\dfrac{1}{8}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\cdot3^{3+p}+4=3^{3+q}-1\\8\cdot3^{5+p}+8=3^{5+q}-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\cdot3^{3+p}-3^{3+q}=-5\\8\cdot3^{5+p}-3^{5+q}=-9\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}4\cdot3^{3+p}-3^{3+q}=-5\\8\cdot3^2\cdot3^{3+p}-3^2\cdot3^{3+q}=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\cdot3^{3+p}-3^{3+q}=-5\\72\cdot3^{3+p}-9\cdot3^{3+q}=-9\end{cases}$$

Stel nu $3^{3+p}=A$ en $3^{3+q}=B$ ⇒

$$\begin{cases}4A-B=-5\\72A-9B=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4A-B=-5\\8A-B=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4A=4\\8A-B=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=9\end{cases}$$

A = 1 dan $3^{3+p}=1\Leftrightarrow p=-3$

B = 9 dan $3^{3+q}=9\Leftrightarrow 3^{3+q}=3^2\Leftrightarrow q=-1$

64. Gegeven : $f(x)=\dfrac{4}{x+1}+\dfrac{5}{x+2}$

a. $F(x)=4\ln|x+1|+5\ln|x+2|\Rightarrow F'(x)=4\cdot\dfrac{1}{x+1}+5\cdot\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{4}{x+1}+\dfrac{5}{x+2}$

⇒ *F* is een primitieve van *f*(*x*).

b.
$f(x)=\dfrac{4}{x+1}+\dfrac{5}{x+2}=\dfrac{4}{x+1}\cdot\dfrac{x+2}{x+2}+\dfrac{5}{x+2}\cdot\dfrac{x+1}{x+1}=$

$\dfrac{4x+8}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{5x+5}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{9x+13}{(x+1)(x+2)}$

c.
Aangezien dat uit a en b geldt dat g*x*) = *f*(*x*) volgt nu meteen dat een primitieven van g(*x*) is : $F(x)=4\ln|x+1|+5\ln|x+2|$

65.

a. $\int \frac{5x-14}{x^2-6x+8}dx$

Stel $\frac{5x-14}{x^2-6x+8} = \frac{5x-14}{(x-4)(x-2)} = \frac{a}{x-4} + \frac{b}{x-2} \Rightarrow$

$$\frac{a}{x-4}\cdot\frac{x-2}{x-2} + \frac{b}{x-2}\cdot\frac{x-4}{x-4} = \frac{ax-2a+bx-4b}{(x-4)(x-2)} = \frac{(a+b)x+(-2a-4b)}{(x-4)(x-2)} = \frac{5x-14}{(x-4)(x-2)}$$

Dit is een ware bewering voor alle x als geldt :

$a+b=5$ en $-2a\ -4b=-14 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a+2b=7 \\ a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int \frac{5x-14}{x^2-6x+8}dx = \int \frac{3}{x-4} + \frac{2}{(x-2)}dx = 3\ln|x-4| + 2\ln|x-2| + C$$

b. $\int \frac{x+11}{x^2+4x+3}dx$

Stel $\frac{x+11}{x^2+4x+3} = \frac{x+11}{(x+3)(x+1)} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x+1} \Rightarrow$

$$\frac{a}{x+3}\cdot\frac{x+1}{x+1} + \frac{b}{x+1}\cdot\frac{x+3}{x+3} = \frac{ax+a+bx+3b}{(x+1)(x+3)} = \frac{(a+b)x+(a+3b)}{(x+1)(x+3)} = \frac{x+11}{(x+1)(x+3)}$$

Dit is een ware bewering voor alle x als geldt :

$a+b=1$ en $a+3b=\ 11 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a+3b=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b=10 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int \frac{x+11}{x^2+4x+3}dx = \int \frac{-4}{x+3} + \frac{5}{x+1}dx = -4\ln|x+3| + 5\ln|x+1| + C$$

c.

$\int \frac{3x+24}{x^2+7x+10}dx$

Stel $\frac{3x+24}{x^2+7x+10} = \frac{3x+24}{(x+5)(x+2)} = \frac{a}{x+5} + \frac{b}{x+2} \Rightarrow$

$$\frac{a}{x+5}\cdot\frac{x+2}{x+2} + \frac{b}{x+2}\cdot\frac{x+5}{x+5} = \frac{ax+2a+bx+5b}{(x+5)(x+2)} = \frac{(a+b)x+(2a+5b)}{(x+5)(x+2)} = \frac{3x+24}{(x+5)(x+2)}$$

Dit is een ware bewering voor alle x als geldt :

$a+b=3$ en $2a+5b=\ 24 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 2a+5b=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2b=6 \\ 2a+5b=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b=18 \\ a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=6 \end{cases}$$

$$\int \frac{3x+24}{x^2+7x+10}dx = \int \frac{-3}{x+5} + \frac{6}{x+2}dx = -3\ln|x+5| + 6\ln|x+2| + C$$

d.

$$\int \frac{x}{x^2+7x+12}dx$$

Stel $\frac{x}{x^2+7x+12} = \frac{x}{(x+4)(x+3)} = \frac{a}{x+4} + \frac{b}{x+3} \Rightarrow$

$$\frac{a}{x+4}\cdot\frac{x+3}{x+3} + \frac{b}{x+3}\cdot\frac{x+4}{x+4} = \frac{ax+3a+bx+4b}{(x+4)(x+3)} = \frac{(a+b)x+(3a+4b)}{(x+4)(x+3)} = \frac{x}{(x+4)(x+3)}$$

Dit is een ware bewering voor alle x als geldt :

$a+b=1$ en $3a+4b=0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 3a+4b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+3b=3 \\ 3a+4b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b=3 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-3 \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{x^2+7x+12}dx = \int \frac{4}{x+4} - \frac{3}{x+3}dx = 4\ln|x+4| - 3\ln|x+3| + C$$

66. Gegeven : $f(x) = \frac{8x+4}{x^2-4}$

a. Eerst :

$$f(x) = \frac{8x+4}{x^2-4} = 3 \Rightarrow 3x^2-12 = 8x+4 \Leftrightarrow 3x^2-8x-16=0 \Rightarrow$$

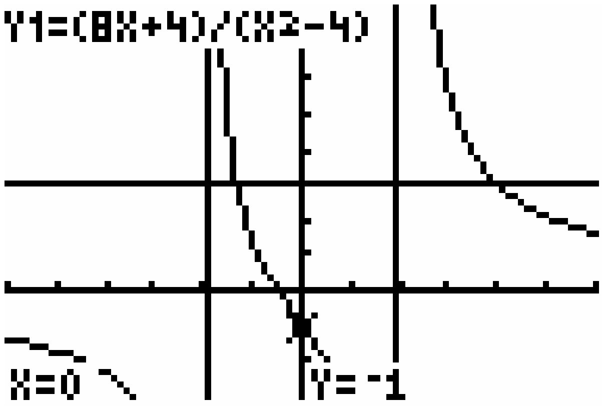
$$D = 64-4\cdot3\cdot(-16) = 256 \Rightarrow x = \frac{8+16}{6} = 4 \vee x = \frac{8-16}{6} = -1\tfrac{1}{3}$$

Nu de schets van de twee grafieken :

Aflezen uit de schets geeft :

$f(x) \leq 3 \Rightarrow$

$x < -2 \vee -1\tfrac{1}{3} \leq x < 2 \vee x \geq 4$



b. Snijpunt met de y-as is : (0 , -1)

$$f'(x) = \frac{8(x^2-4)-2x(8x+4)}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x^2-8x-32}{(x^2-4)^2} \Rightarrow f'(0) = -2 \Rightarrow$$

Stel de vergelijking is nu : $y = -2x + b$ Door het punt (0,-1) $\Rightarrow$

De vergelijking van de raaklijn k is : $y = -2x - 1$

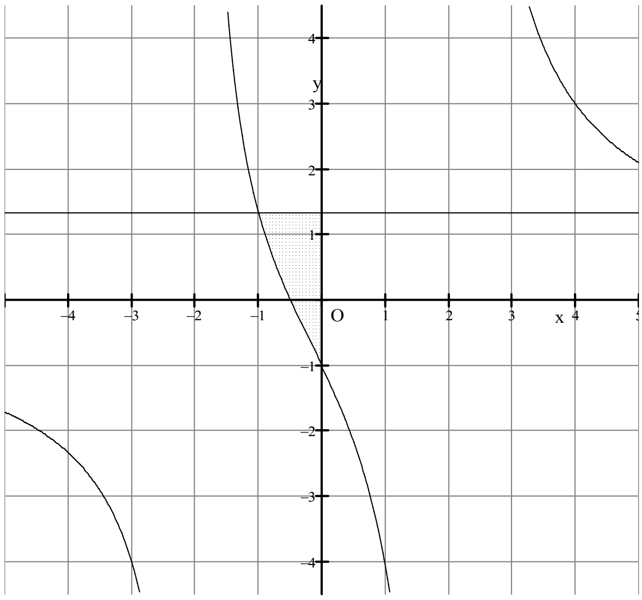
c.

Eerst snijpunt met y = 4/3 $\Rightarrow$

$$\frac{8x+4}{x^2-4}=\frac{4}{3}\Rightarrow 4x^2-16=24x+12\Leftrightarrow 4x^2-24x-28=0\Leftrightarrow$$

$$x^2-6x-7=0\Leftrightarrow (x-7)(x+1)=0\Leftrightarrow x=7\vee x=-1$$

$$O=\int_{-1}^{0} 1\tfrac{1}{3}-\frac{8x+4}{x^2-4}\,dx$$



Stel $\dfrac{8x+4}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+2}$

$$\Rightarrow \frac{a}{(x-2)}.\frac{x+2}{x+2}+\frac{b}{x+2}.\frac{x-2}{x-2}=$$

$$=\frac{ax+2a+bx-2b}{(x-2)(x+2)}=\frac{(a+b)x+(2a-2b)}{(x-2)(x+2)}$$

Dit is een ware bewering voor alle *x* als geldt :

$$a+b=8 \text{ en } 2a-2b=4\Rightarrow$$

$$\begin{cases}a+b=8\\2a-2b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=8\\a-b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=10\\a+b=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\b=3\end{cases}$$

$$O=\int_{-1}^{0} 1\tfrac{1}{3}-\frac{8x+4}{x^2-4}\,dx=\int_{-1}^{0} 1\tfrac{1}{3}-\left(\frac{5}{x-2}+\frac{3}{x+2}\right)dx=$$

$$\Rightarrow \left[1\tfrac{1}{3}x-5\ln|x-2|-3\ln|x+2|\right]_{-1}^{0}=\left(-5\ln(2)-3\ln(2)\right)-\left(-1\tfrac{1}{3}-5\ln(3)-0\right)=$$

$$1\tfrac{1}{3}-8\ln(2)+5\ln(3)$$

67. Gegeven : $e^{x-p}=6$ en $-2pe^{x-p}=24$

a. De eerste vergelijking gaan invullen $\Rightarrow$ $-2p\cdot 6=24$

b. $-2p\cdot 6=24\Leftrightarrow p=-2\Rightarrow e^{x+2}=6\Leftrightarrow x+2=\ln(6)\Leftrightarrow x=-2+\ln(6)$

68

a. $\begin{cases}px\sqrt{x^2+4}=x^2+3\\p\sqrt{x^2+4}=4\end{cases}\Rightarrow x\cdot 4=x^2+3\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow$

$$(x-3)(x-1)=0\Leftrightarrow x=3\vee x=1$$

Als x = 3 dan $p\cdot\sqrt{13}=4\Leftrightarrow p=\dfrac{4}{\sqrt{13}}=\dfrac{4}{13}\sqrt{13}$

Als $x = 1$ dan $p \cdot \sqrt{5} = 4 \Leftrightarrow p = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}\sqrt{5}$

b.

$$\begin{cases} pe^{x^2-1} = x^2+1 \\ pxe^{x^2-1} = x^3+x^2-6 \end{cases} \Rightarrow (x^2+1)x = x^3+x^2-6 \Leftrightarrow x^3+x = x^3+x^2-6 \Leftrightarrow$$

$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$

Als $x = 3$ dan $p \cdot e^8 = 10 \Leftrightarrow p = \frac{10}{e^8}$

Als $x = -2$ dan $p \cdot e^3 = 5 \Leftrightarrow p = \frac{5}{e^3}$

c.

$$\begin{cases} 2 + a \cdot \ln(x+1) = x \\ 2ax \cdot \ln(x+1) = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot \ln(x+1) = x-2 \\ 2x \cdot (x-2) = 48 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 4x - 48 = 0 \Leftrightarrow$$

$x^2 - 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow (x-6)(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 6 \vee x = -4$

Als $x = 6$ dan $a \cdot \ln(6+1) = 4 \Leftrightarrow a = \frac{4}{\ln(7)}$

$x = -2$ geeft verder geen a –oplossing.

d.

$$\begin{cases} x + \frac{x+p}{2x+3} = 2 \\ \sqrt{\frac{x+p}{2x+3}} = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + x^2 = 2 \\ \frac{x+p}{2x+3} = x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$(x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$

Als $x = -2$ dan $\sqrt{\frac{-2+p}{-4+3}} = -2$ Dit kan natuurlijk niet.

Als $x = 1$ dan $\sqrt{\frac{1+p}{2+3}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1+p}{2+3} = 1 \Leftrightarrow 1 + p = 5 \Leftrightarrow p = 4$

69. $f_p(x) = e^{x^2+p} + x$

$$f_p(x) = 0 \text{ en } f'_p(x) = 0 \Rightarrow e^{x^2+p} + x = 0 \text{ en } e^{x^2+p} \cdot 2x + 1 = 0$$

X-as raken $\Rightarrow \begin{cases} e^{x^2+p} + x = 0 \\ e^{x^2+p} \cdot 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x^2+p} = -x \\ -x \cdot 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x^2+p} = -x \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$x^2 = \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \vee x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

Als $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan $e^{\frac{1}{2}+p} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + p = \ln\left(2^{-\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow p = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$

Het raakpunt is dan : $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2},0\right)$

Als $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan hebben we geen p-oplossing.

70. Gegeven : $f_p(x)=\sqrt{x^2+p}$ staat loodrecht op de lijn $y = 5x + 5$

Loodrecht snijden $\Rightarrow \sqrt{x^2+p}=5x+5$ en

$$f'(x)\cdot y'=-1 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x^2+p}}\cdot 2x\cdot 5=-1 \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+p}=5x+5\\ \dfrac{5x}{5x+5}=-1\end{cases} \Rightarrow 5x=-5x-5 \Leftrightarrow 10x=-5 \Rightarrow x=-\tfrac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}+p}=-2\tfrac{1}{2}+5 \Leftrightarrow \sqrt{\tfrac{1}{4}+p}=2\tfrac{1}{2} \Rightarrow \tfrac{1}{4}+p=6\tfrac{1}{4} \Leftrightarrow p=6\begin{cases}e^{x^2+p}=-x\\ -x\cdot 2x+1=0\end{cases}$$

Conclusie . Bij $p = 6$ snijden de grafieken elkaar loodrecht.

71. Gegeven : $f_p(x)=\ln(p-x^2)$ en $g_q(x)=-x^2+q$

f raakt de functie *g*. $\Rightarrow$

$$\begin{cases}\ln(p-x^2)=-x^2+q\\ \dfrac{1}{p-x^2}\cdot(-2x)=-2x\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{p-x^2}=1 \vee x=0$$

Als $\dfrac{1}{p-x^2}=1 \Rightarrow p-x^2=1 \Leftrightarrow x^2=p-1 \Rightarrow 0=1-p+q \Rightarrow p=q+1$

Als $x = 0$ dan $\ln(p)=q \Leftrightarrow p=e^q$